RELATIONS FOR GROTHENDIECK GROUPS AND REPRESENTATION-FINITENESS

HARUHISA ENOMOTO (榎本 悠久)

Abstract. A Grothendieck group is the abelian group associated with an exact category. It was known that the defining relations of the Grothendieck group is closely related to the representation-finiteness. The aim of this article is to unify and generalize several known results about this.

1. Introduction

グロタンディーク群とは、アーベル圏やより一般に完全圏に対して与えられるアーベル群である。このグロタンディーク群の関係式が環の有限表現性と密接に関わるという次の Butler と Auslander による結果が知られている:

Theorem 1 ([Bu, Au])**.** Λ を有限次元多元環としたとき、次は同値である*:*

- Λ は有限表現型である。
- $\mathsf{mod}\,\Lambda$ のグロタンディーク群の関係式が *Auslander-Reiten* 列で生成される。

本稿の目的は、[En2] に基づいて、これについて知られていることを完全圏の文脈で統一的に与え一般化することである。

1.1. **必要な記号の準備.** 本稿の目的を明確に述べるために、以下記号の準備をしていく。

Definition 2. $\mathcal{E}$ を Krull-Schmidt 完全圏とする。

1. $\mathsf{ind}\,\mathcal{E}$: $\mathcal{E}$ の直既約対象の同型類の集合
2. $\mathsf{K}_0(\mathcal{E}, 0)$: $\mathsf{ind}\,\mathcal{E}$ を基底とする自由アーベル群。ここで $[X \oplus Y] = [X] + [Y]$ と置くことで、$\mathcal{E}$ の対象が決まると $\mathsf{K}_0(\mathcal{E}, 0)$ の元が一意的に定まることに注意。
3. $\mathsf{Ex}(E)$: 以下で生成される $K_0(\mathcal{E}, 0)$ の部分群:
   $$\{[X] - [Y] + [Z] \mid \text{ある } \mathcal{E} \text{ の短完全列 } 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \text{ が存在する}\}.$$
4. $\mathsf{K}_0(E) := \mathsf{K}_0(E, 0)/Ex(E)$: 商アーベル群で、これを $\mathcal{E}$ のグロタンディーク群と呼ぶ.

つまり $\mathsf{Ex}(\mathcal{E})$ は $\mathcal{E}$ のグロタンディーク群の定義関係式に対応する部分群である。

次に、分裂しない短完全列のなかである意味「極小」である **Auslander-Reiten** 列の、Krull-Schmidt 完全圏の文脈での定義を導入する:

Definition 3. Krull-Schmidt 完全圏 $\mathcal{E}$ における短完全列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ が **AR** 列であるとは次を満たすときをいう:

1. X と Z は直既約である。
2. この短完全列は分裂していない。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

(3) 任意の直既約対象 W からの非同型射 $W \to Z$ は g を経由する。
(4) 任意の直既約対象 W への非同型射 $X \to W$ は f を経由する。

この定義のもとで、次の記号を導入しよう:

Definition 4. Krull-Schmidt な完全圏 $\mathcal{E}$ に対して、$\mathsf{AR}(\mathcal{E})$ を以下で生成される $\mathsf{K}_0(E, 0)$ の部分群とする:

$$\{[X] - [Y] + [Z] \mid \text{ある } \mathcal{E} \text{ の AR 列 } 0 \to X \to Y \to Z \to 0 \text{ が存在する}\}.$$

定義から、$\mathsf{K}_0(\mathcal{E}, 0) \supset \mathsf{Ex}(\mathcal{E}) \supset \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ という包含がなりたつことに注意。このとき、先程の Butler と Auslander による定理は、Λ が有限表現型であることと $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ の成立が同値という定理である。

1.2. **問題提起.** 本稿の疑問は、この視点の次のような自然な一般化である:

疑問. Krull-Schmidt な完全圏 $\mathcal{E}$ に対して、次の (1) と (2) はいつ同値だろうか:

(1) $\mathcal{E}$ が有限型 ($:\Leftrightarrow \mathsf{ind}\,\mathcal{E}$ が有限集合) である。
(2) $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が成り立つ。

これについては、$\mathcal{E}$ が体上 Hom-finite な状況ならば (1) $\Rightarrow$ (2) が成り立つことが著者の以前の論文 [En1, Corollary 3.18] から分かるが、逆は一般に成り立たない (反例がある)。なのでよい制限をしなければ上の 2 つは同値にならないが、本稿での結果は次の二方向での結果である。

(1) **加群圏の部分圏への一般化**: 有限次元代数 Λ に対する加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の「よい部分圏」$\mathcal{E} \subset \mathsf{mod}\,\Lambda$ に対して上の (1) と (2) が同値 (Theorem 7)。
(2) **基礎環の高次元化**: 完備正則局所環 R 上の整環 Λ に対して、Λ 格子のなす完全圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ において (1) と (2) が同値になる十分条件を与える (Theorem 13)。

本稿は、2 節において主結果を正確に定式化し、その後 3 節においてその関手的証明の概略を説明する。

2. 主結果

序文で述べたように、「有限次元代数の加群圏の部分圏への拡張」と「高次元への拡張」の 2 つについて本稿では結果を与える。

2.1. **有限次元代数の場合.** この 2.1 節において体 k を固定する。有限次元代数の場合の主結果を述べるために必要な定義を導入していこう。まず環 Λ に対して、有限生成右 Λ 加群のなす圏を $\mathsf{mod}\,\Lambda$ と書く。

Definition 5. 有限次元代数 Λ と部分圏 $\mathcal{E} \subset \mathsf{mod}\,\Lambda$ に対して以下を定義する:

(1) $\mathcal{E}$ が **resolving** であるとは、次を満たすときをいう。
  (a) 拡大と直和因子で閉じている。
  (b) すべての射影加群を含む。
  (c) Λ 加群の短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して、Y と Z が $\mathcal{E}$ に入るならば、X も $\mathcal{E}$ に入る。
(2) $\mathcal{E}$ が**反変有限 (contravariantly finite)** であるとは、任意の Λ 加群 $X \in \mathsf{mod}\,\Lambda$ に対して次の性質を満たす射 $f\colon E_X \to X$ が存在する:
  (a) E_X は $\mathcal{E}$ に入る。
  (b) 任意の $\mathcal{E}$ の対象 E からの射 $g\colon E \to X$ は必ず f を経由する。

このような射 f のことを**右 $\mathcal{E}$ 近似 (right $\mathcal{E}$-approximation)** と呼ぶ。

Example 6. 以下は反変有限な resolving 部分圏の例である。

- Faithful な torsion-free class で、入射加群をすべて含むようなもの。これはよく知られている通り、「反変有限 (関手的有限でもよい) な faithful torsion-free class」や「入射次元 1 以下の cotilting module からくる torsion-free class」とも同値である。
- 一般に反変有限 (関手的有限) な torsion-free class は、その annihilator で環を割ることで、完全圏としての構造を保ったまま (1) であげたものに取り替えることができる。
- Quasi-hereditary な環上の standard filtration を持つ加群のなす圏。
- 入射次元有限な cotilting module U に対して、その直交部分圏 ${}^{\perp}U := \{X \in \mathsf{mod}\,\Lambda \mid \mathrm{Ext}_{\Lambda}^{>0}(X, U) = 0\}$。特に、岩永-Gorenstein 有限次元代数 Λ 上の Gorenstein-projective 加群からなる圏 $\mathsf{GP}\,\Lambda$ はその典型例である。

このとき、次の結果が成り立つ:

Theorem 7 ([En2, Theorem 4.11])**.** *$\mathcal{E}$ をある有限次元代数 Λ の加群圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の反変有限な resolving 部分圏としたとき、次は同値である:*

(1) $\mathcal{E}$ が有限型である。
(2) $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が成り立つ。

これは、先ほどあげた例の全てに適応できる。

2.2. **高次元化.** この節では有限次元代数 Λ 上の有限生成加群の圏 $\mathsf{mod}\,\Lambda$ の代わりに、完備正則局所環上の整環 Λ に対して Cohen-Macaulay Λ 加群のなす圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ に対して Butler-Auslander の結果の類似がなりたつかを調べていく (0 次元の場合が Butler-Auslander の結果に対応する)。まずは整環について必要な定義を与えよう。

Definition 8. R を Krull 次元 d のネーター局所環とする。

(1) R が**正則局所環**であるとは、R の大域次元が有限なときをいう。このときその値は自動的に d になる。
(2) R が**完備**であるとは、R の極大イデアルから定まる位相について R が完備なときをいう。
(3) R 代数 Λ が**整環**であるとは、Λ を R 加群と見たときに有限生成自由加群であるときをいう。
(4) R 整環 Λ 上の加群 M が **Cohen-Macaulay** 加群であるとは、M を R 加群と見たときに有限生成自由であるときをいう。このとき、Cohen-Macaulay Λ 加群のなす圏を $\mathsf{CM}\,\Lambda$ と書く。これは拡大で閉じた加群圏の部分圏なので、以下これを完全圏とみなす。

Example 9. 次は整環の例である:

(1) 0 次元正則局所環と体は同じ概念であり、自動的に完備となる。このとき整環と有限次元代数は同じもので、整環上の Cohen-Macaulay 加群は有限次元加群のことである。
(2) S をネーター局所環であって正則局所環上 module-finite であるものとする。このとき、S が通常の意味での Cohen-Macaulay 環であることと上で述べた意味で Cohne-Macaulay 環であることは同値である。このとき上の意味での Cohen-Macaulay S 加群は通常の Cohen-Macaulay 加群と同じものである。また、完備ネーター局所環は

ほとんどの場合はある正則局所環上 module-finite なことが知られている (Noether の正規化定理の完備版)。

このとき、有限次元自己入射代数の高次元類似として、次の概念が定義できる:

Definition 10. d 次元完備正則局所環上の整環 Λ が **Gorenstein 整環**であるとは、次の同値な定義どれかを満たすときをいう:

(1) 完全圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ において Λ が入射的対象である。
(2) 完全圏 $\mathsf{CM}\,\Lambda$ が Frobenius な完全圏である。
(3) Λ の右 Λ 加群としての入射次元が d である。
(4) 上 3 つの左右を入れ替えたもの。

Example 11. 次は Gorenstein 整環である。

(1) 有限次元自己入射環と 0 次元 Gorenstein 整環は同じものである。
(2) 可換な完備 Gorenstein 局所環 S であって整環であるものは Gorenstein 整環である。このとき、Cohen-Macaulay S 加群と Gorenstein-projective S 加群は同じ概念である。

また Gorenstein 整環は岩永-Gorenstein であるが、岩永-Gorenstein 整環は必ずしも Gorenstein 整環とならないことに注意。

また、整環上での Auslander-Reiten 理論がうまく work するために次の条件を導入する。

Definition 12. 完備正則局所環 R 上の整環 Λ が**孤立特異点 (isolated singularity)** であるとは、次の同値な条件のどれかを満たすときをいう:

(1) R の任意の素イデアル p に対して、局所化した環 Λ_p の大域次元が p の高さ ($= R_p$ の次元) に等しい。
(2) R の任意の素イデアル p に対して、$\mathsf{CM}\,\Lambda_p$ において全ての短完全列が分裂する ($=$ 完全圏構造が自明なものである)。
(3) 任意の $\mathsf{CM}\,\Lambda$ の非射影直既約加群に対して、それを一番右に持つような AR 列が $\mathsf{CM}\,\Lambda$ において存在する。
(4) 任意の $\mathsf{CM}\,\Lambda$ の (完全圏の意味での) 非入射的対象に対して、それを一番左に持つような AR 列が存在する。

ここで次の結果が成り立つ。

Theorem 13 ([En2])**.** *Λ を完備正則局所環上の整環で孤立特異点だとする。このとき、Λ が大域次元有限であるか Gorenstein 整環であるとすれば、次は同値である:*

(1) $\mathsf{CM}\,\Lambda$ が有限型である。
(2) $\mathsf{Ex}(\mathsf{CM}\,\Lambda) = \mathsf{AR}(\mathsf{CM}\,\Lambda)$ が成り立つ。

ここで「大域次元有限または Gorenstein」という仮定が落とせるかは未解決であり、一般の整環に対して上がなりたつと予想されているが、可換の場合ですら解決されていない。

3. 証明の概略

主結果の 2 つは、ともに関手的な考えのもとで統一的に証明される。本節ではそれについて概略を説明する。おおまかな証明の概略は、Introduction で導入した疑問を次のように改良することである:

疑問. Krull-Schmidt な完全圏 $\mathcal{E}$ に対して、次はいつ同値だろうか:

(1) $\mathcal{E}$ が有限型である。
(1.5) $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ に属する任意の $\mathcal{E}$ 加群は長さ有限である。
(2) $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が成り立つ。

後に $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ は定義するが、これは右 $\mathcal{E}$ 加群のなす圏の部分圏であり、ある意味 (3) の categorification であるが、圏論的な条件なことから (1) とも相性がよい。以下これらについて詳述していく。

3.1. **Effaceable 関手.** まず関手圏的な考え方について復習をしよう:

Definition 14. $\mathcal{E}$ を加法圏とする。このとき**右 $\mathcal{E}$ 加群**とは $\mathcal{E}$ からアーベル群のなす圏への加法的反変関手のことであり、$\mathcal{E}$ 加群の射は自然変換である。このとき $\mathcal{E}$ 加群のなす圏はアーベル圏になる。

このような関手圏的見方のメリットの一つは、任意の加法圏が有限生成射影加群の圏と同一視できることである。

Proposition 15. $\mathcal{E}$ を *Krull-Schmidt* な加法圏とすると、米田埋め込み $X \mapsto \mathcal{E}(-,X)$ は $\mathcal{E}$ と有限生成射影 $\mathcal{E}$ 加群のなす圏の間の圏同値を与える。

Effaceable 関手というのは完全圏上の加群であって、完全圏構造を反映した概念である (もともとは Grothendieck によってアーベル圏の場合に導入された)。

Definition 16. $\mathcal{E}$ を Krull-Schmidt 完全圏としたとき、$\mathcal{E}$ 加群 M が **effaceable** であるとは、ある $\mathcal{E}$ 内の短完全列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to -$ であって、次が $\mathcal{E}$ 加群の完全列となるものが取れるときをいう:

$$0 \to \mathcal{E}(-,X) \xrightarrow{\mathcal{E}(-,f)} \mathcal{E}(-,Y) \xrightarrow{\mathcal{E}(-,g)} \mathcal{E}(-,Z) \to M \to 0$$

また effaceable 関手のなす圏を $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ と書く。

このとき $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ の完全圏構造を反映する次のような非常に良い性質を持つ。

Proposition 17. $\mathcal{E}$ を *Krull-Schmidt* 完全圏としたときに次が成り立つ。

(1) $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ 加群のなすアーベル圏のアーベル部分圏である *(*つまり核と余核で閉じる*) (*[En2, Theorem A.2]*)*。
(2) $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ という圏から $\mathcal{E}$ 上の完全圏構造を復元することができる。より正確には、$\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ の対象の射影分解がちょうど米田埋め込みのもと $\mathcal{E}$ の短完全列と対応する *(*[En1, Proposition 2.8, Lemma 2.9]*)*。
(3) $\mathcal{E}$ が豊富な射影的対象を持つ場合、$\mathsf{eff}\,\mathcal{E} = \mathsf{mod}\,\underline{\mathcal{E}}$ となる。ここで右辺は射影安定圏 $\underline{\mathcal{E}}$ 上の有限表示加群のなす圏である *(*[En2, Lemma 2.13]*)*。

このように、$\mathcal{E}$ の短完全列はと $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ の対象はおおざっぱに対応しているが、この対応のもとで、次のように AR 列を $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ にいる単純加群と同一視することができる。

Proposition 18 ([En2, Proposition 2.3])**.** $\mathcal{E}$ を *Krull-Schmidt* 完全圏としたときに、次が成り立つ*:*

(1) $\mathcal{E}$ の *AR* 列 $0 \to X \to Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ が与えられると、$\mathcal{E}$ 加群の圏の中での $\mathcal{E}(-,g)$ の余核は $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ に入り、また単純加群となる。
(2) 逆に $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ に入る任意の単純加群の極小射影分解は、上のように $\mathcal{E}$ の *AR* 列から来ている。

この意味で、先程の条件 (1.5)「$\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ の任意の対象は長さ有限である」は、「任意の短完全列が AR 列から組み立てられる」というニュアンスとなり、それを数値的に書いたものが (2)「$\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$」だとみなすことができるのである。

3.2. 一般的な結果.

本節では、完備ネーター局所環を基礎環として、できるだけ一般的な状況で先程の条件 (1) と (1.5) と (2) との同値性を示していく。**以下 R を完備ネーター局所環と仮定する。また $\mathcal{E}$ を Krull-Schmidt で十分豊富な射影的対象を持つ完全圏であり、各射集合 $\mathcal{E}(X,Y)$ が有限生成 R 加群、また任意の非射影的直既約対象に対してそれを一番右に持つような AR 列が存在するようなものとする。**

Definition 19. **射影安定圏** $\underline{\mathcal{E}}$ とは、加法圏 $\mathcal{E}$ を射影的対象からなる部分圏で割ったイデアル商とする。この圏が**弱余生成子 (weak cogenerator)** C **を持つ**とは、任意の対象 X に対して $\underline{\mathcal{E}}(X,C)=0$ なら X が $\underline{\mathcal{E}}$ において 0 となるとき、すなわち X が $\mathcal{E}$ において射影的となるときをいう。

Example 20. 一般に R 加群として有限生成加群である R 代数 Λ に対して、$\mathsf{mod}\,\Lambda$ の反変有限な resolving 部分圏 $\mathcal{E}$ は弱余生成子を持つ ([En2, Proposition 4.7])。具体的には、単純 Λ 加群を全て直和したものの右 $\mathcal{E}$ 近似が余生成子になる。とくに整環 Λ について $\mathsf{CM}\,\Lambda$ は、$\mathsf{mod}\,\Lambda$ の中で反変有限 resolving であるので余生成子を持つ。

次に、本稿において一番テクニカルな条件である条件 (CF) を導入しよう。

Definition 21. 完全圏 $\mathcal{E}$ が**条件 (CF) を満たす**とは、$\mathcal{E}$ での任意の 2 つの短完全列 $0 \to X \xrightarrow{f_i} Y \xrightarrow{g_i} Z \to 0$ ($i=1,2$) に対して、$\mathcal{E}(-,g_1)$ の余核が長さ有限 $\mathcal{E}$ 加群ならば、$\mathcal{E}(-,g_2)$ の余核も長さ有限となるときをいう。

ここで CF とは Conservation of Finiteness (有限性の保存) の頭文字である。

Example 22. 次の条件を満たせば (CF) は満たされる。

- 基礎環が体 (より一般にアルティン環) の場合 ([En2, Proposition 4.10])。
- $\mathcal{E}$ が Frobenius 完全圏である場合か、$\mathcal{E}$ が大域次元有限 (つまり任意の $\mathcal{E}$ の対象が $\mathcal{E}$ の意味で射影次元有限) である場合 ([En2, Proposition 4.14])。

以上の準備のもと、次を示すことができる:

Theorem 23 ([En2, Theorem C])**.** *次の 3 つの条件を考える:*

(1) $\mathcal{E}$ は有限型である。
(1.5) $\mathsf{eff}\,\mathcal{E}$ に属する任意の $\mathcal{E}$ 加群は長さ有限である。
(2) $\mathsf{Ex}(\mathcal{E}) = \mathsf{AR}(\mathcal{E})$ が成り立つ。

このとき次が成り立つ:

- (1) $\Rightarrow$ (1.5) $\Rightarrow$ (2) が成り立つ。
- $\underline{\mathcal{E}}$ が弱余生成子を持つなら、(1) と (1.5) は同値である。
- $\mathcal{E}$ が条件 (CF) を満たすなら、(1.5) と (2) は同値である。

2 節で述べた Theorems 7,13 は、上に述べた事実から直ちに従うことに注意せよ。

References

[Au] M. Auslander, *Relations for Grothendieck groups of Artin algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **91** (1984), no. 3, 336–340.

[AR] M. Auslander, I. Reiten, *Grothendieck groups of algebras and orders*, J. Pure Appl. Algebra **39** (1986), no. 1–2, 1–51.

[Bu] M. C. R. Butler, *Grothendieck groups and almost split sequences*, Lecture Notes in Math. **882** (1981) Springer, Berlin-New York, 1981.

[En1] H. Enomoto, *Classifications of exact structures and Cohen-Macaulay-finite algebras*, Adv. Math. **335** (2018), 838–877.

[En2] H. Enomoto, *Relations for Grothendieck groups and representation-finiteness*, arXiv:1806.07650.

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya, 464-8602, Japan

Email address: `m16009t@math.nagoya-u.ac.jp`